المحاضرة 4

تابع حل المعادلات من الرتبة الأولى

أنواع الحلول من الرتبة الأولى

1) الحل العام
2) الحل الخاص
3) الحل الشاذ
4) الحل التكاملي
5) الحل التكاملي الخاص
6) الحل التكاملي الشاذ
7) الحل التكاملي الشاذ الخاص

سادساً: حل معادلة تفاضلية متجانسة

* في الأول إزاي نعرف دي معادلة متجانسة؟
← عندنا طريقتين ...

الطريقة الأولى

لو بضرب كل الـ x و y في λ بحيث نوصل الناتج في الآخر

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$

المعادلة نفسها تبقى متجانسة

مثال: $f(x,y) = 3x^2 - 2xy$

$f(\lambda x, \lambda y) = 3(\lambda x)^2 - 2(\lambda x)(\lambda y)$

$= 3\lambda^2 x^2 - 2\lambda^2 xy$

$= \lambda^2 (3x^2 - 2xy)$

من الرتبة الثانية

الطريقة الثانية

لو ودي هتكون بالتخمين وباعمل فيها بتجميع الأسس لو طلعت كل حدودها بنفس الدرجة متجانسة

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 - x^3}{x^0 y^2}$

كل الأسس = 3 .. متجانسة

#

خطوات حل المعادلات المتجانسة

المعادلة ⟵ $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$

(1) $\frac{dy}{dx} = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ ⟵ "شرط المعادلة"

(2) let $z = \frac{y}{x} \Rightarrow \{y = x.z\}$

(3) $\therefore \frac{dy}{dx} = \phi(z)$

(4) $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$ ⟵ "تابعة" ← فاضل

(5) $z + x\frac{dz}{dx} = \phi(z)$

(6) $x\frac{dz}{dx} = \phi(z) - z$ ⟵ "فصل المتغيرات"

(7) $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\phi(z) - z}$ ← تكامل

$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{\phi(z) - z} + c$ ⟵ "حل الوظيفة" وفي الآخر رجع $(z = \frac{y}{x})$

لاحظ في بعض المسائل بتحتاج تقسم على x عشان تبسط $\left(\frac{y}{x}\right)$ ...

Ex (1)

وجدل المعادلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$$

Sol

لا حاجة لتصحيح الأس لأنها متجانسة

لا بس محتاج أفرضها

لو هقول بالقسمة على أعلى درجة لـ x بسط ومقام

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2}{x^2} + \frac{2xy}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}}{1}$$

(1) $\therefore \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}$ ← "فرضت المعادلة"

(2) Let $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot z$ ← فرض

(3) $\frac{dy}{dx} = z^2 + 2z$

(4) $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$ ← "قاعدة"

(5) $\therefore z + x\frac{dz}{dx} = z^2 + 2z$ "فصل المتغيرات"

$$x\frac{dz}{dx} = z^2 + 2z - z = z^2 + z$$

$$\therefore \frac{x}{dx} = \frac{z^2 + z}{dz}$$ ← نقلب للتكامل

$$\therefore \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{z^2 + z}$$ ← كامل الوفيت

$\ln x =$ كسور جزئية

"Cover up method".

$$\therefore \ln x = \int \frac{dz}{z(z+1)}$$ "حذف عامل مشترک"

$$\ln x = \int \left(\frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} \right)$$

$A \Rightarrow z=0 \quad A=1$

$B \Rightarrow z=-1 \quad B=-1$

$$\therefore \ln x = \int \left(\frac{1}{z} + \frac{-1}{z+1} \right) dz$$

$$\ln x = \ln z - \ln(z+1) + \ln c$$

$$\ln x = \ln \left(\frac{c \cdot z}{z+1} \right)$$

$$\therefore x = \frac{c \cdot z}{z+1}$$ → "کمل جملات"

EXTRA $\therefore x = \frac{c \cdot y/x}{y/x + 1}$ → کما انک خاصت پس لو خاوز تجیب y

$$\left(\frac{1}{x} = \frac{\frac{y}{x}+1}{c \cdot \frac{y}{x}} \right) \Rightarrow \left(\frac{1}{x} = c\frac{y/x}{y/x} + c\frac{1}{y/x} \right)$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{c} + \frac{x}{cy}$$ (بالضرب $\frac{c}{x}$)

$$\frac{c}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \Rightarrow \therefore \frac{1}{y} = \frac{c}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{xc - x^2}{x^3} = \frac{x(c-x)}{x^3}$$

$$\therefore \frac{1}{y} = \frac{c-x}{x^2} \quad \therefore y = \frac{x^2}{c-x}$$ #

أوجد حل المعادلة التالية

Ex(2)

$$x^3 \frac{dy}{dx} = x^2 y - 2y^3$$

∴ متجانسة
لـ اضربها أول حاجة

Sol

(1) $$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y}{x^3} - \frac{2y^3}{x^3}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 2\left(\frac{y}{x}\right)^3$$

(2) let $z = \frac{y}{x} \Rightarrow \boxed{y = x \cdot z}$

(3) $$\frac{dy}{dx} = z - 2z^2$$

(4) $$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

$$\therefore z + x\frac{dz}{dx} = z - 2z^3$$ "فصل المتغيرات"

$$\therefore x\frac{dz}{dx} = z - 2z^3 - z$$

شقلبها وكمل $\Leftarrow$ $$\frac{x}{dx} = \frac{-2z^3}{dz}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{-2z^3}$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}\int z^{-3}\,dz$$

$$\ln x = \frac{-1}{-2}\frac{z^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{4}z^{-2} + C$$

$$\ln x = \frac{1}{4z^2} + C$$ حل جميلك

نعوض $z = \frac{y}{x}$

$$\ln x = \frac{1}{4\left(\frac{y}{x}\right)^2} + c$$

$$\ln x = \frac{x^2}{4y^2} + c$$

$$\therefore \frac{\ln x - c}{1} = \frac{x^2}{4y^2}$$

$$\therefore 4y^2 = \frac{x^2}{4(\ln x - c)}$$

$$\therefore y = \sqrt{\frac{x^2}{4(\ln x - c)}}$$

$$y = \frac{x}{2\sqrt{\ln x - c}}$$

$$y' = \frac{x}{2\sqrt{\ln x + c}}$$

لاحظ الاشارة أمام الثابت مش هتتوه