المحاضرة : 6

تابع حل الرتب العليا

* طرق حل الرتب العليا

1) طريقة المعاملات غير المعينة

2) طريقة تغيير البارامتر

المحاضرة السابقة

خطواتها

تذكر:

$$y_G = y_c + y_p$$

الحل العام — متجانس — * تخمين

* لو كانت اى حاجة من الـ ٣ حالات الي خدناهم هنعرف نحل عادي بطريقة المعاملات غير المعينة.

* لو كانت بقا مختلفة زي الـ $r(x) = \sec x$ مثلاً.

* هنا بقا هنحل على أساس الـ y_c وده بسيطة -
هنجيب الـ y_c اياً كان بقا الـ ٣ حالات بتوعها
وهنشيل الثابتة سواء كان A, B او C_1, C_2
ونحط ثابته جديد اسمه وليكن u ← u_1 ، u_2.

* ومن هنا هيبقى عندك حواشي جديدة ،
سهلة جداً بمجرد ما تاخد عليها خلاص فهمت.

الخطوات

طريقة تغيير البارامتير (2)

1) هتجيلك مسألة شكلها عادي

$$\circledast \quad y'' + a(x)y' + b(x)y = F(x)$$

2) هتنزل بالقانون

الحل العام

$$y_G = y_c + y_p$$

3) هتجيب ال y_c الأول

$$\Rightarrow y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

4) هات بقا ال y_p بمعلومية ال y_c

$$\Rightarrow y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$u_1 = \int \frac{w_1}{w} dx$$

$$u_2 = \int \frac{w_2}{w} dx$$

(*) ثوابت جديدة بتوعها

(*) وصلت للحل بمجرد لما تجيبهم

1) $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = (y_1 y_2') - (y_2 y_1')$

2) $W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ F(x) & y_2' \end{vmatrix} = y_2 F(x)$

3) $W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & F(x) \end{vmatrix} = y_1 F(x)$

$$\therefore y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w} dx + y_2 \int \frac{w_2}{w} dx \quad \#$$

Ex (1)

$$y'' - y = e^{2x}$$

تحل بالطريقتين

sol

$$y_G = y_c + y_p$$

$$\boxed{y'' - y = 0}$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\therefore \lambda = \sqrt{1}$$

$$\lambda_1 = +1$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\therefore y_c = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$\boxed{y_c = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}}$$

هنغير الثوابت @ let

$$y_p = u_1 \underset{y_1}{e^{x}} + u_2 \underset{y_2}{e^{-x}}$$

Note

$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{w_1}{w}\,dx \\ u_2 &= \int \frac{w_2}{w}\,dx \end{aligned}}$$

$$\therefore w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$\therefore w = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = \left(e^{x} \cdot \frac{-1}{e^{x}}\right) - \left(e^{x} \cdot \frac{1}{e^{x}}\right)$$

$$\boxed{w = -2}$$

$$\therefore w_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & F(x) \end{vmatrix} = y_1 F(x)$$

@ جمع الاسس

$$\therefore w_2 = \begin{vmatrix} e^{x} & 0 \\ e^{x} & e^{2x} \end{vmatrix} = e^{x} e^{2x} = e^{3x}$$

$$\therefore w_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ F(x) & y_2' \end{vmatrix} = -y_2 F(x)$$

اطرح الاسس

$$\therefore w_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ e^{2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{e^{x}} e^{2x} = -e^{x}$$

$$\therefore u_1 = \int \frac{w_1}{w}\,dx = \int \frac{\cancel{-}e^{x}}{\cancel{-}2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x}\,dx = \frac{1}{2} e^{x}$$

$$u_2 = \int \frac{w_2}{w}\,dx = \int \frac{e^{3x}}{-2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{3x}\,dx = \frac{-1}{2} \cdot \frac{e^{3x}}{3} = \frac{-e^{3x}}{6}$$

Note $\frac{d}{dx} e^{F(x)} = e^{F(x)} \cdot F'(x)$

$$\therefore \int e^{F(x)} = \frac{e^{F(x)}}{F'(x)}$$

$\frac{1}{2}e^{x}$ $\quad -\frac{1}{6}e^{3x}$

$\therefore y_p = \underline{u_1} e^{x} + \underline{u_2} e^{-x}$

$= \frac{1}{2}e^{x}e^{x} + \frac{1}{6}e^{3x}e^{-x}$

$= \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{6}e^{2x} = \underline{\frac{1}{3}e^{2x}}$

$\therefore y_G = y_c + y_p$

$$\boxed{y_G = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}} \quad \#$$

* اذا علمت $\boxed{y(0)=0,\ y'(0)=0}$

اوجد الحل الخاص ؟

$\therefore y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$

$y' = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} + \frac{2}{3}e^{2x}$

at $y(0)=0 \Rightarrow c_1 + c_2 + \frac{1}{3} = 0 \longrightarrow (1)$

$y'(0)=0 \Rightarrow c_1 - c_2 + \frac{2}{3} = 0 \longrightarrow (2)$

$\therefore 2c_1 + 1 = 0$

$\therefore \boxed{c_1 = -\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{1}{6}}$

الحل الخاص

$$\therefore \boxed{y = -\frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{6}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}} \quad \#$$

Ex(2)

$$y'' + y = \sec x$$

حل

$\therefore y_G = y_c + y_p$

$y'' + y = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\therefore \lambda = \sqrt{-1}$

$\therefore \lambda = \pm i$

$\alpha = 0 \quad \pm\beta$

$\therefore y_c = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

$$\boxed{y_c = A\cos x + B\sin x}$$

$y_p = u_1 \overset{y_1}{\cos x} + u_2 \overset{y_2}{\sin x}$

Note: $\boxed{u_1 = \int \frac{w_1}{w}\,dx \qquad u_2 = \int \frac{w_2}{w}\,dx}$

$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}$

$= \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sec x & \cos x \end{vmatrix}$

$= -\sin x \cdot \left(\frac{1}{\cos x}\right)$

$= -\tan x$

$W_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sec x \end{vmatrix} = \cos x \cdot \left(\frac{1}{\cos x}\right)$

$= 1$

تذكرت

$\left(-\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx\right)$

$\therefore u_1 = \int \frac{w_1}{w}\,dx = \int -\tan x\,dx = \ln\cos x$

$u_2 = \int \frac{w_2}{w}\,dx = \int 1\,dx = x$

$\therefore y_p = u_1\cos x + u_2\sin x = \ln(\cos x)\cdot\cos x + x\sin x$

الحل الي؟

$\therefore y_G = A\cos x + B\sin x + \cos x \ln\cos x + x\sin x$ #

H.W

$$\boxed{y'' + 9y = \sec 3x}$$

$$y_G = y_c + y_p$$

$A\cos 3x + B\sin 3x$

$\frac{1}{3}\cos 3x \ln \cos 3x + x\sin 3x$