خطوات حل المعادلات تؤول لمتجانسة "متقاطعين"

الصورة العامة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

⊗ بيكون عندك معادلة زي كده.

⊗ بتتأكد انها تؤول لمتجانسة عن طريق $c_2 < c_1$

⊗ بعد كده بتشوف هل متقاطعين ولا متوازيين عن طريق القاعدة القديمة بتاعتنا

متوازيين $\Rightarrow a_1b_2 = a_2b_1$

متقاطعين $\Rightarrow a_1b_2 \neq a_2b_1$

① ⊗ لو كانوا متقاطعين بتجيلي نقطة التقاطع (x_1, y_1)

② let

$$x = X + \underbrace{x_1}_{\text{نقطة تقاطع}}, \quad y = Y + \underbrace{y_1}_{\text{نقطة تقاطع}}$$

$$dx = dX, \quad dy = dY$$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}}$$

⊗ وبعد كده بتحول في المعادلة الأساسية بتعك وهتحول متجانسة.

⊗ بدأ بحل نفس خطوات المتجانسة زي الآخر، ومتنساش في الآخر تكمل تحويل وتحوليها تاني بالمعادلة الأصلية في البداية، وساعتها صار تعليك الحل ✓

☺

Ex(1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y+1}$$

تحول متجانسة

متوازيين & متقاطعين ؟

الحل

$$a_1 b_2 \neq a_2 b_1$$
$$1 \times -1 \neq 1 \times 1$$

∴ متقاطعين

اولاً (1) هحيبه نقاط التقاطع

$$\begin{array}{r} x+y-3 \\ x-y-1 \quad (+) \\ \hline 2x = 4 \end{array}$$

$x = 2$ ، ∴ $y = 1$

∴ $(2, 1)$

ثانياً (2) let

$$x = X + 2 \quad , \quad y = Y + 1$$
$$dx = dX \quad , \quad dy = dY$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

ثالثاً (3) بالتعويض

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+2+Y+1-3}{X+2-Y-1-1}$$

$$\therefore \frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y} \longrightarrow \text{"أصبحت متجانسة"}$$

⊛ القسمة على x عشان اعزلها

$$\therefore (1) \frac{dY}{dX} = \frac{X/X + Y/X}{X/X - Y/X} = \frac{1 + Y/X}{1 - Y/X}$$

② let $z = Y/X \Rightarrow Y = X.z$

③ $\frac{dY}{dx} = \frac{1+z}{1-z}$ ← "معرفة"

④ $\frac{dY}{dx} = z + X\frac{dz}{dx}$ ← "نابعة"

⑤ $z + X\frac{dz}{dx} = \frac{1+z}{1-z}$ ← "فصل المتغيرات"

$X\frac{dz}{dx} = \frac{1+z}{1-z} - z = \frac{1+z-z+z^2}{1-z}$

$X\frac{dz}{dx} = \frac{z^2+1}{-z+1}$

شكل وكامل $\frac{dx}{x} = \frac{-z+1}{z^2+1}\,dz$

$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{-z+1}{z^2+1}\,dz$ ← "تكامل مباشر"

$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{x^2+1}$

$\ln x = \int \left(\frac{-1}{2}\right)\frac{(-2z)}{z^2+1}\,dz + \int \frac{1}{z^2+1}\,dz$

$\ln x = \frac{-1}{2}\ln(z^2+1) + \tan^{-1}z + C$

⑥ كل حيلك ورجع كل المتغيرات لمتغيراتين وأصلية

$z = Y/X$ ، $X = x-2$ ، $Y = y-1$

$\therefore \ln(x-2) = \frac{-1}{2}\ln\left(\frac{Y^2}{X^2}+1\right) + \tan^{-1}\frac{Y}{X} + C$

$\ln(x-2) = \frac{-1}{2}\ln\left(\frac{(y-1)^2}{(x-2)^2}+1\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y-1}{x-2}\right) + C$