المؤثر التفاضلي

المحاضرة : 7

Note

$$\frac{d}{dx} = D$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = Dy$$

هنشتغل بطريقة المؤثر في حالتين من ٣ حالات

$F(x)$

- mx^2+nx+c كثيرة الحدود
  - حلها بطريقة تؤول مطابقة
  - $y_p = Ax^2+Bx+c$
- $\sin kx$, $\cos kx$, $\sinh kx$, $\cosh kx$ → (k^2)
  - $$\frac{1}{f(D^2)} \begin{cases} \sin kx \\ \cos kx \end{cases} = \frac{1}{f(-k^2)} \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases}$$
  - بشرط ان $f(-k^2) \neq 0$
  - Note: لازم تكون كلها D^2 وبس
- ① e^{kx}
  - $$\frac{1}{f(D)} e^{kx} = \frac{1}{F(k)} e^{kx}$$
  - بشرط ان $F(k) \neq 0$
  - x رقم ثابت ← خاصة
  - $$\frac{1}{F(D)} x = \frac{1}{F(D)} x e^{0x}$$
  - بشرط انه $F(x) \neq 0$

Ex (4) $k=2$

$$y'' - y = e^{2x}$$

① حولها للمعادلة العكسية

$$y_G = y_c + y_p$$

$$(D^2 - 1)y = e^{2x}$$

y_c

$\lambda^2 - 1 = 0$

$\therefore \lambda = \pm 1$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

$\therefore y_c = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

$y_c = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

y_p

② بتقسم على كل المعادلة الـ y

$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 - 1} e^{2x}$

③ عند التعويض $D = 2$ بيطلع المقام $\neq 0$

$\therefore y_p = \frac{1}{2^2 - 1} e^{2x}$

$y_p = \frac{1}{3} e^{2x}$

$$\therefore y_G = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x}$$

#

Ex(2)

$$(D^2-3D+2)y = e^{5x}+3$$

Note $\alpha e^{\beta x}$ يتحط حسب الرقم

$$y_G = y_c + y_p$$

$$\lambda^2-3\lambda+2=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda-1)=0$$

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=1$$

$$y_c = c_1e^{2x} + c_2e^{x}$$

بالقسمة على المعامل الأول y

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^2-3D+2}(e^{5x}+3)$$

$$y_p = \frac{1}{D^2-3D+2}e^{5x} + \frac{1}{D^2-3D+2}3e^{0x}$$

$$y_p = \frac{1}{(5)^2-3(5)+2}e^{5x} + \frac{1}{(0)^2-3(0)+2}3$$

$$y_p = \frac{1}{12}e^{5x} + \frac{3}{2}$$

$$y_G = c_1e^{2x} + c_2e^{x} + \frac{1}{12}e^{5x} + \frac{3}{2}$$

#

Ex(3)

Note

مع cos ، sin لازم
نعوض مكان D^2 تربيع بس

$$(D^2-9)y = 2\cos 4x \quad \rightarrow (k)$$

$$y_G = y_c + y_p$$

$\lambda^2 - 9 = 0$

$\therefore \lambda_1 = +3$

$\lambda_2 = -3$

$$\therefore y_c = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$$

① بالقسمة على (D^2-9)

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^2-9} \, 2\cos 4x$$

② نعوض مكان $D^2 = -k^2 = -16$

$$y_p = \frac{1}{-16-9} \, 2\cos 4x$$

$$y_p = \frac{-2}{25}\cos 4x$$

$$y_G = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x} - \frac{2}{25}\cos 4x$$

#

طب او لو فيه D مع sin _ cos
اعمل اى ؟؟ !

Ex (4)

$$(D^2+4D+3)y = \sin 2x$$

$$y_G = y_c + y_p$$

$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$

$\therefore y_c = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

$$y_c = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$$

بالتعويض امام ال y

$\therefore y_p = \frac{1}{D^2+4D+3} \sin 2x$

بالتعويض عن $D^2 = -2^2 = -4$

$y_p = \frac{1}{-4+4D+3} \sin 2x$

$y_p = \frac{1}{4D-1} \sin 2x$

تيجي هنا وتعطل — STOP

$\left(\frac{4D+1}{4D+1}\right)$ هضرب × المرافق

$\therefore y_p = (4D+1) \frac{1}{(4D+1)(4D-1)} \sin 2x$ — $D^2 = -2^2 = -4$

$y_p = (4D+1) \frac{1}{16D^2-1} \sin 2x$

$y_p = \frac{-1}{65} [(4D+1) \sin 2x]$

$y_p = \frac{-1}{65} [4 \frac{d}{dx} \sin 2x + \sin 2x]$ — $2\cos 2x$

$$y_p = \frac{1}{65} [4 \times 2\cos 2x + \sin 2x]$$

$y_G = y_c + y_p$ #

Ex (5)

$$y'' + y' + y = \cosh x + \sin 2x$$

$$(D^2 + D + 1)y = \cosh x + \sin 2x$$

$$y_G = y_c + y_p$$

$m^2 + m + 1 = 0$

$m = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$y_c = e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

$y_p = \frac{1}{D^2+D+1}(\cosh x + \sin 2x)$

$y_p = \frac{1}{D^2+D+1}\cosh x + \frac{1}{D^2+D+1}\sin 2x$

$y_p = \frac{1}{1^2+D+1}\cosh x + \frac{1}{(-4)+D+1}\sin 2x$

$y_p = \frac{1}{D+2}\cosh x + \frac{1}{D-3}\sin 2x$

$\frac{D-2}{D-2}$ $\qquad$ $\frac{D+3}{D+3}$

$\therefore y_p = (D-2)\frac{1}{D^2-4}\cosh x + (D+3)\frac{1}{D^2-9}\sin 2x$

($D^2 \to 1$, $D^2 \to -4$)

$= \frac{-1}{4}((D-2)\cosh x) + \frac{-1}{13}[(D+3)\sin 2x]$

$= \frac{-1}{4}[\frac{d}{dx}\cosh x - 2\cosh x] - \frac{1}{13}[\frac{d}{dx}\sin 2x + 3\sin 2x]$

$= \frac{-1}{4}[\sinh x - 2\cosh x] - \frac{1}{13}(2\cos 2x + 3\sin 2x)$

$\therefore y_G = y_c + y_p$