الفصل الثاني

حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى

اولاً: المعادلات القابلة للفصل: Exam

$$f(x, y, y') = 0 \longrightarrow$$ عدد المعادلات

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x)}{N(y)} \longrightarrow$$ افصل المتغيرات

$$\int M(x)\,dx = \int N(y)\,dy \longrightarrow$$ كامل الطرفين

Ex(1)

(A) اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + \cos x}{y^2}$$

Sol

(1) نضرب وسطين x وسطين

$$\therefore dy\, y^2 = dx\,(x + \cos x)$$

(2) نضبط واجيب التكامل ليهم

$$\therefore \int y^2\, dy = \int (x + \cos x)\, dx$$

(3) نفك التكامل وحل عادي للآخر

$$\therefore \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + \sin x + C \longrightarrow (\times 3)$$

$$y^3 = \frac{3}{2} x^2 + 3\sin x + 3C$$

#

Ex(2)

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{3y^2+1}$$

Sol

$$x^2(3y^2+1)\,dy = (x^2+1)\,dx$$

* بالقسمة ÷ x^2 عشان تتظبط المعادلة

$$\therefore \int (3y^2+1)\,dy = \int \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) dx$$

$$= \int (3y^2+1)\,dy = \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$\boxed{x^{-2}}$

$$= y^3 + y = x - \frac{x^{-1}}{1} + c$$

$$= x - \frac{1}{x} + c \quad \#$$

Ex(3)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

" مقدم على مقدم يساوي تالي على تالي "

Sol

تذكر انه

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore \int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \tan^{-1}y = \tan^{-1}x + c$$

$$\therefore y = \tan(\tan^{-1}x + c) \quad \#$$

Ex(٤)

$$\frac{dy}{dx} = x e^{x-y} + (4x^3-1)e^{-y}$$ فكها

أوجد الحل العام

Sol

$$\frac{dy}{dx} = x e^{x} \cdot e^{-y} + (4x^3-1)e^{-y}$$ "عامل مشترك"

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y}\left(x \cdot e^{x} + [4x^3-1]\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xe^{x} + (4x^3-1)}{e^{y}}$$ طرفين في وسطين + "تكامل الطرفين"

$$\int e^{y}\,dy = \int \left(xe^{x} + [4x^3-1]\right)dx$$

$$\Rightarrow e^{y} = \int xe^{x}\,dx + \frac{4x^4}{4} - x$$

"تكامل بالتجزئ"

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

فاضل $u = x \longrightarrow du = 1\,dx$

كامل $dv = e^{x} \longrightarrow v = e^{x}$

$$\therefore \int xe^{x}\,dx = xe^{x} - \int e^{x}$$

$$= xe^{x} - e^{x} + c$$

$$\therefore e^{y} = xe^{x} - e^{x} + x^4 - x + c$$

#

Ex(5)

اوجد الحل العام للمعادلة ، ثم اوجد الحل الخاص عند $y(0)=+1$

$$\frac{dy}{dx} = \cancel{\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}} = \frac{y\cos x}{1+2y^2}$$

Sol

اولاً الحل العام :

$$(1+2y^2)\,dy = y\cos x\,dx$$

÷ بالقسمة على y وأخذ تكامل الطرفين :

$$\therefore \int\left(\frac{1+2y^2}{y}\right)dy = \int \cos x\,dx$$

$$\int\left(\frac{1}{y}+\frac{2y^2}{y}\right)dy = \sin x + c$$

$$\ln y + \frac{2y^2}{2} = \sin x + c$$

$$\ln y + y^2 = \sin x + c \longrightarrow (1)$$

ثانياً : الحل الخاص

$$y(x) = a$$

$$y(0) = +1$$

∴ عند التعويض في معادلة (1) عن قيمة x و y

$$\ln y + y^2 = \sin x + C$$

$$\ln(1) + 1^2 = \sin(0) + C$$

$$\therefore C = 1$$

الاجابة النهائية

$$\therefore \ln y + y^2 = \sin x + 1$$

Ex(6)

Hard 100

★★★ اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + xy}{1 + y^2}$$

Solution

" اخذ x كعامل مشترك " + اوفينك x وسابت

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x(2 + y)}{1 + y^2}$$

$$\therefore (1 + y^2)\, dy = x\,(2 + y)\, dx$$

" بالقسمة على $(2+y)$ للطرفين + اخذ التكامل

$$\therefore \int \left(\frac{1 + y^2}{2 + y}\right) dy = \int x\, dx$$

لاحظ عندما تكون درجة البسط > من درجة المقام "قسمة مطولة"

① اكبر اوس

الاوس اللي بعده

$y - 2$ ← "خارج القسمة"

"المقام" $2 + y$

$1 + y^2$ ← "البسط"

$2y + y^2$

$1 - 2y$ ← "كرر نفس الخطوة السابقة"

$-4 - 2y$

5 ← "رقم صحيح stop"

$$\therefore \int \left(\frac{1 + y^2}{2 + y}\right) dy = \int x\, dx$$

"خارج القسمة"

$$= \int (y - 2)\, dy + \int \frac{5}{2 + y}\, dy = \int x\, dx$$

$$\therefore \frac{y^2}{2} - 2y + 5 \ln (2 + y) = \frac{x^2}{2} + C \quad \#$$

Ex(7)

اوجد الحل العام والخاص :

$$\frac{dy}{dx} = 8x^3 y^2 \; ; \; y(2) = 3$$

Sol

أولاً الحل العام : بالضرب $\times \frac{1}{8x^3}$

$$\therefore \frac{dy}{8x^3\,dx} = y^2$$

" مقدم / مقدم = تالي / تالي " + اخذ التكامل

$$\therefore \int \frac{dy}{y^2} = \int 8x^3\,dx$$

$$\int (y)^{-2}\,dy = 8\,\frac{x^4}{4} + C$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} = 2x^4 + C$$

$$-\frac{1}{y} = 2x^4 + C$$

ثانياً الحل الخاص :

عندما : $y = 3$ ، $x = 2$

$$\therefore -\frac{1}{3} = 2(2)^4 + C \Rightarrow -\frac{1}{3} = 32 + C$$

والمعادلة

$$\therefore C = -\frac{97}{3}$$

$$\therefore -\frac{1}{y} = 2x^4 - \frac{97}{3}$$

or

$$y = \frac{-1}{2x^4 - \frac{97}{3}} \quad \#$$

Ex (8)

أوجد الحل العام للمعادلة الآتية :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x) + 2}{\sin(y) + y}$$

$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

Sun

$$\int [\sin(y) + y]\, dy = \int [\cos(x) + 2]\, dx$$

$$\Rightarrow -\cos y + \frac{y^2}{2} = \sin x + 2x + c$$

Ex (9)

أوجد الحل العام للمعادلة الآتية :

$$x \frac{dy}{dx} + y^2 = 1$$

Sun

تذكرة

$\frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}$

$$x \frac{dy}{dx} = 1 - y^2$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1-y^2}{x}$

"المقدم/مقدم = تالي/تالي"

"دور المشترك / x واحد التكامل"

$$\therefore \int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \tanh^{-1} y = \ln x + c$$

تذكرة

$\ln a + \ln b = \ln(a.b)$

or

$$\tanh^{-1} y = \ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow \tanh^{-1} y = \ln(c.x)$$

$$\therefore y = \tanh(\ln(xc)) \quad \#$$

الحمد لله # Done