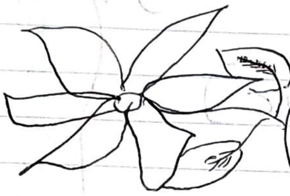
المحاضرة 3

تابع حل المعادلات من الرتبة الأولى

أنواع الحلول من الرتبة الأولى

1) فصل المتغيرات
2) خطية برنولي
3) تؤول لخطية برنولي
4) تامة
5) تؤول لتامة



رابعًا: حل معادلات تفاضلية تامة

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \longrightarrow (1)$$

let:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \longrightarrow (2)$$

"لو اثبت صحتها تبقا تامة"

"فاضل بالنسبة لـ x"
"أي حاجة y يعتبر ثابته"
"وتفاضل الثابته بـ 0"

فاضل بالنسبة لـ y
"أي حاجة x يعتبر ثابته"
"وتفاضل الثابته بـ 0"

(معادلة 1) كامل بالنسبة لـ x $\Longrightarrow$ $\int M(x,y)\,\partial x$ (1)

(معادلة 2) كامل بالنسبة لـ y $\Longrightarrow$ $\int N(x,y)\,\partial y$ (2)

والحل العام

$\Phi_{(x,y)}$ = ناتج كلًا من معادلات 1 و 2 بدون تكرار $+ \underline{C}$ #

Ex(1)

أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$2xy^3 + 3x^2y^2\underset{\text{لما } \frac{dy}{dx}}{y'} = 0$$

Sol

ن ضرب المعادلة

$$\overset{M(x,y)}{2xy^3}\,dx + \overset{N(x,y)}{3x^2y^2}\,dy = 0$$

let

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}} \longrightarrow \text{إثبات محققة}$$

$$\therefore M(x,y) = 2xy^3 \quad , \quad N(x,y) = 3x^2y^2$$

فاضل بالنسبة لـ y   فاضل بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2} \rightarrow \text{تامة } (\checkmark)$$

تكامل بالنسبة لـ x

$$① \Rightarrow \int M(x,y)\,\partial x = \int 2xy^3\,\partial x = \underset{\text{ثابت}}{2y^3}\int x\,\partial x$$

$$= 2y^3\,\frac{x^2}{2} + c = \boxed{x^2y^3 + c}$$

تكامل بالنسبة لـ y

$$② \Rightarrow \int N(x,y)\,\partial y = \int 3x^2y^2\,\partial y = 3x^2\int y^2\,\partial y$$

$$= 3x^2\,\frac{y^3}{3} + c = \boxed{x^2y^3 + c}$$

الحل العام

$\therefore \phi(x,y) =$ ناتج (1)،(2) بدون تكرار

$$= x^2y^3 + c \quad \#$$

Ex(2)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y^2\cos x + (1+2y\sin x)\underbrace{y'}_{\text{تعني } \frac{dy}{dx}} = 0$$

Sol

$$\overset{M(x,y)}{y^2\cos x\,dx} + \overset{N(x,y)}{(1+2y\sin x)\,dy} = 0$$

let

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}} \longrightarrow \text{إثبات صحتها}$$

"ثابتة تفاضله بـ0"

$$\therefore M(x,y) = y^2\cos x \quad , \quad N(x,y) = (1+2y\sin x)$$

فاضل بالنسبة لـ y

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 2y\cos x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y\cos x$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2y\cos x} \rightarrow \text{تامة}$$

تكامل بالنسبة لـ x

$$\text{①} \Rightarrow \int M(x,y)\,\partial x = \int y^2\cos x\,\partial x = y^2\int \cos x\,\partial x$$

$$= \boxed{y^2\sin x + c} \rightarrow \text{①}$$

$$\text{②} \Rightarrow \int N(x,y)\,\partial y = \int (1+2y\sin x)\,\partial y$$

$$= \boxed{y + y^2\sin x + c} \rightarrow \text{②}$$

#

الحل العام

$$\therefore \Phi(x,y) = \text{①} + \text{②} \quad \text{بدون تكرار}$$

$$= y^2\sin x + y + c \quad \#$$

Ex(3)

أوجد الحل العام:

$$(y\cos x+2xe^{y})+(\sin x+x^{2}e^{y}+2)y'=0$$

$y' = \frac{dy}{dx}$

Sol

$$(y\cos x+2xe^{y})\,dx+(\sin x+x^{2}e^{y}+2)\,dy=0$$

$M(x,y)$, $N(x,y)$

let $\boxed{\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}}$ → إثبات صحتها

$$M(x,y)=y\cos x+2xe^{y},\quad N(x,y)=\sin x+x^{2}e^{y}+2$$

تفاضل بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\cos x+2xe^{y},\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\cos x+2xe^{y}$$

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=\cos x+2xe^{y}}$$ → تامة

تكامل بالنسبة لـ x

① $\int M(x,y)\,\partial x=\int (y\cos x+2xe^{y})\,\partial x$

$$=\boxed{y\sin x+x^{2}e^{y}+c} \rightarrow ①$$

تكامل بالنسبة لـ y

② $\int N(x,y)\,\partial y=\int(\sin x+x^{2}e^{y}+2)\,\partial y$

$$=\boxed{y\sin x+x^{2}e^{y}+2y+c} \rightarrow ②$$

الحل العام

$$\phi(x,y)=y\sin x+x^{2}e^{y}+2y+c$$

#